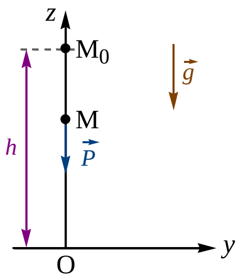
Effet Splash – Modélisation (dynamique du point)

En lien avec les programmes de 1ère et PCSI

<u>But</u> : obtenir l'expression de l'énergie cinétique de la goutte lors de l'impact sur le sol en fonction de la hauteur de chute.

- **Etude mécanique (sans frottement)**

Retrouvons l'énergie cinétique de la goutte au moment de l'impact dans les situations précédentes.



On lâche, sans vitesse initiale, à la verticale du point O et à la hauteur h (embout de la burette), une goutte de masse m. On suppose que la chute a lieu **sans frottement** dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ (chute libre).

<u>Système</u> : la goutte M, de masse m *<u>Référentiel</u>* : terrestre, supposé galiléen.

<u>Bilan des forces extérieures</u> : Poids de l'objet : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = \underbrace{-mg}_{= P_z} \cdot \vec{u}_z$ car $\vec{g} = -g \cdot \vec{u}_z$

Expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la goutte, assimilée au point matériel M :

D'après le PFD : $m \cdot \vec{a} = \vec{P} = m \cdot \vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{ctte}$

$$\text{donc} \quad \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} = \underbrace{-g}_{= a_z} \cdot \vec{u}_z \quad \text{soit, en prenant la primitive :} \quad \vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{A} = -gt \cdot \vec{u}_z + \vec{A}$$

La goutte est lâchée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$:

$$\underbrace{\vec{v}(0) = \vec{0}}_{\text{condition initiale}} = \underbrace{\vec{0} + \vec{A} = \vec{A}}_{\substack{\text{solution prise} \\ \text{à } t = 0}} \quad \text{donc} \quad \vec{A} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{g}t = \underbrace{-gt}_{= v_z(t)} \cdot \vec{u}_z}$$

$$\text{En prenant une nouvelle fois la primitive :} \quad \overrightarrow{OM}(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{B} = -\frac{gt^2}{2} \cdot \vec{u}_z + \vec{B}$$

Or, M est lâché d'une altitude h à l'instant $t = 0$:

$$\underbrace{\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OM}_0 = h \cdot \vec{u}_z}_{\text{condition initiale}} = \underbrace{\vec{0} + \vec{B} = \vec{B}}_{\substack{\text{solution prise} \\ \text{à } t = 0}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \underbrace{\overrightarrow{OM}_0}_{= \vec{B}} = \underbrace{\left(-\frac{gt^2}{2} + h\right)}_{= z(t)} \cdot \vec{u}_z}$$

Détermination de la durée de la chute : L'objet arrive au niveau du sol à un instant t_0 tel que $z(t_0) = 0$.

$$z(t_0) = -\frac{gt_0^2}{2} + h = 0 \quad \text{soit} \quad t_0^2 = \frac{2h}{g} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Détermination de la vitesse de l'objet quand il arrive au niveau du sol :
On en déduit l'expression du vecteur vitesse et de sa norme à l'instant t_0.

$$\vec{v}(t_0) = -gt_0 \cdot \vec{u}_z = -\sqrt{2gh} \cdot \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{\|\vec{v}(t_0)\| = |v_z(t_0)| = \sqrt{2gh}}$$

Détermination de l'énergie cinétique de la goutte au moment de l'impact :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t_0)\|^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh}$$

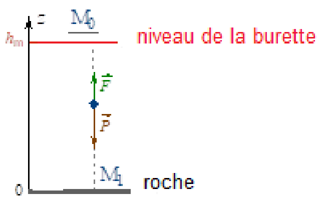
Dans les hypothèses de l'étude, **l'énergie cinétique est proportionnelle à la hauteur de chute.**

<u>2^e^ méthode</u> : utilisation du théorème de l'énergie cinétique (TEC)

<u>Système</u> : la goutte de masse m.

<u>Référentiel</u> : terrestre (supposé galiléen).

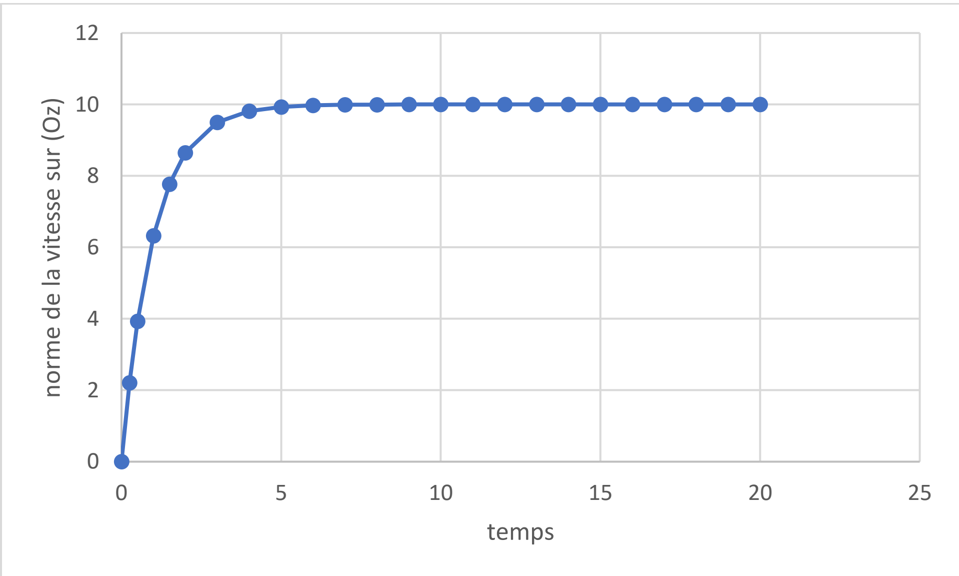
<u>Bilan des forces</u> :
– Poids $\vec{P}$ (**force conservative**)



Appliquons le TEC entre M$_0$ et M$_1$: $\Delta E_c = E_c(\mathrm{M}_1) - E_c(\mathrm{M}_0) = \frac{m}{2}\cdot(v_1^2 - v_0^2) = \boxed{E_c(M_1) = W_{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}(\vec{P}) = mgh}$

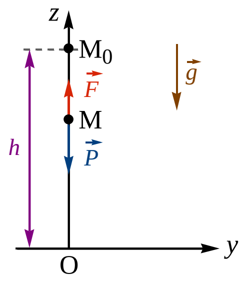
- **Etude mécanique (avec frottements)**

Expérimentalement, on peut montrer que la vitesse de la goutte n'est pas proportionnelle au temps de chute :



La vitesse de l'objet qui chute n'est pas proportionnelle au temps. De plus, cette vitesse atteint une valeur limite (égale ici à 10 m.s^{-1})

<u>Amélioration du modèle</u> : On reprend la situation précédente en supposant maintenant que l'objet est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{v}$ au cours de sa chute dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.



<u>*Système*</u> : l'objet M, de masse m.

<u>*Référentiel*</u> : terrestre, supposé galiléen.

<u>*Bilan des forces extérieures*</u> :

– Poids de l'objet : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = \underbrace{-mg}_{= P_z} \cdot \vec{u}_z$ donc $P_z = -mg$

– Force de frottement fluide (opposée au déplacement) :

$\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{v} = -\lambda \cdot (v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z)$ *a priori*

Une des forces **dépendant de la vitesse**, on utilise le PFD pour écrire une **équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$:** $m \cdot \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} = \vec{P} - \lambda \cdot \vec{v}$ soit $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{g}$

donc $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}}$ (forme canonique) avec, par identification : $\tau = \frac{m}{\lambda}$ (temps caractéristique)

La solution complète de l'équation différentielle vectorielle est la somme :

– de la solution générale de l'équation sans second membre : $\vec{v}_g(t) = \vec{A} \cdot e^{-t/\tau}$ (où $\vec{A}$ est une constante vectorielle) ;

– et d'une solution particulière (constante vectorielle, comme le second membre) : $\vec{v}_p = \tau \cdot \vec{g}$.

$$\text{soit} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_g(t) + \vec{v}_p = \vec{A} \cdot e^{-t/\tau} + \tau \cdot \vec{g}$$

On détermine $\vec{A}$ grâce à la condition initiale : $\underbrace{\vec{v}(0) = \vec{0}}_{\text{condition initiale}} = \underbrace{\vec{A} + \tau \cdot \vec{g}}_{\substack{\text{solution prise} \\ \text{à } t=0}}$ donc $\vec{A} = -\tau \cdot \vec{g}$ donc

$$\boxed{\vec{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \tau \cdot \vec{g} \cdot (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$\text{soit, en projetant selon } Oz : \quad v_z = \frac{dz}{dt} = -\tau g \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

En prenant la primitive de v_z , il vient : $z(t) = -g\tau \cdot (t + \tau e^{-t/\tau}) + B$

On détermine B à l'aide de la condition initiale : $\underbrace{z(0) = h}_{\text{condition initiale}} = \underbrace{-g\tau^2 + B}_{\substack{\text{solution prise} \\ \text{à } t=0}}$ donc $B = h + g\tau^2$

Finalement : $\boxed{z(t) = -g\tau \cdot (t + \tau e^{-t/\tau}) + h + g\tau^2}$

L'objet arrive au niveau du sol à un instant t_0 tel que $z(t_0) = 0$.

$$\boxed{z(t_0) = -g\tau \cdot (t_0 + \tau e^{-t_0/\tau}) + h + g\tau^2 = 0}$$

<u>Résolution</u> :

- Résolution graphique pour trouver t_0
- Ou : on peut montrer que la position varie quasi linéairement par rapport au temps, c'est-à-dire qu'on a pratiquement z(t)=−gτt+h

Ainsi, $\boxed{z(t_0) = -g\tau \cdot t_0 + h} = 0$ *soit* $t_0 = \frac{h}{g\tau}$ $\qquad v_z(t_0) = -\tau g \cdot (1 - e^{-t_0/\tau}) = -\tau g \cdot (1 - e^{-\frac{h}{g\tau^2}})$

Et $E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_0)\|^2 = \frac{1}{2} m (\tau g)^2 \cdot (1 - e^{-\frac{h}{g\tau^2}})^2$